第 20 講　図形と方程式(2)

例題 20 － 1

(1)　次の円の方程式を求めよ.

　　(ア)　中心が $(3,\ -1)$，半径が 5　　　(イ)　原点が中心，点 $(2,\ 3)$ を通る

(2)　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+16=0$ はどのような図形を表すか.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 20 ー 1

⑴　次の円の方程式を求めよ．

　⒜　点 $(3,\ -1)$ を中心とし，x 軸に接する

　⒤　2 点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を直径の両端とする

⑵　方程式 $x^2+y^2+5x-3y+6=0$　はどのような図形を表すか．

⑶　方程式 $x^2+2x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題20－2

(1)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ．

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の条件を満たすような k の値および値の範囲を求めよ．

(ア)　異なる2点で交わる　　(イ)　1点で接する　　(ウ)　共有点をもたない

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 20 − 2

(1)　円 $x^2+y^2=2$ と直線 $2x-y+3=0$ の共有点の座標を求めよ．

(2)　円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ と直線 $y=x+m$ が異なる2点で交わるとき，定数 m のとりうる値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 20 − 3

(1) 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 点 $(2,\ -1)$ から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の方程式を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 20 ー 3

(1)　円 $x^2+y^2=20$ 上の点 $(-2,\ -4)$ における接線の方程式を求めよ.

(2)　点 $(1,\ 5)$ から $x^2+y^2=13$ に引いた接線の方程式を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 20 － 4

2 円 $x^2+y^2=10$，$x^2+y^2-2x+6y+2=0$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2 円の共有点の座標を求めよ．

(2)　2 円の共有点を通る直線の式を求めよ．

(3)　2 円の共有点と原点を通る円の中心の座標と半径を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 20 ー 4

2 円 $x^2+y^2-6x+5=0$，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ について，次の問いに答えよ.

(1)　2 円の共有点を通る直線の式を求めよ.

(2)　2 円の共有点と点 $(1,\ 3)$ を通る円の中心の座標と半径を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　図形と方程式(2)

(1)　円 $x^2+y^2+4x-6y=0$ と中心が同じで，点 $(2,\ 1)$ を通る円の方程式は

$(x+$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2=$ ウエ　である．

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=mx+2$ が共有点をもつときの定数 m の値の範囲は

$m \leqq -\sqrt{\text{オ}}$，$\sqrt{\text{オ}} \leqq m$　である．

(3)　点 $(4,\ 2)$ を通り，円 $x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式は

$y=$ カ ， キ $x-$ ク $y-$ ケコ $=0$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　図形と方程式(2)

例題20－1

(1)　次の円の方程式を求めよ.

　(ア)　中心が $(3,\ -1)$，半径が5　　(イ)　原点が中心，点 $(2,\ 3)$ を通る

(2)　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+16=0$ はどのような図形を表すか.

(1)　(ア)　求める円の方程式は　$(x-3)^2+(y+1)^2=5^2$　　つまり　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=25}$

　(イ)　求める円の半径 r は，中心 $(0,\ 0)$ と 点 $(2,\ 3)$ の距離.

　よって　$r=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

　したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2=(\sqrt{13})^2$　つまり　$\boldsymbol{x^2+y^2=13}$

(2)　$x^2+y^2-6x+10y+16=0$　より　$(x-3)^2-9+(y+5)^2-25+16=0$

$(x-3)^2+(y+5)^2=18=(3\sqrt{2})^2$　　よって　**中心 $(3,\ -5)$，半径 $3\sqrt{2}$ の円**　を表す.

類題20－1

(1)　次の円の方程式を求めよ.

　(ア)　点 $(3,\ -1)$ を中心とし，x 軸に接する

　(イ)　2点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を直径の両端とする

(2)　方程式 $x^2+y^2+5x-3y+6=0$　はどのような図形を表すか.

(3)　方程式 $x^2+2x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ.

(1)　(ア)　求める円は x 軸に接するので，中心 $(3,\ -1)$ と x 軸との距離1が半径である.

　よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=1}$

　(イ)　中心は2点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を結ぶ線分の中点である.

　その座標は　$\left(\dfrac{-6+4}{2},\ \dfrac{2-2}{2}\right)=(-1,\ 0)$

　半径 r は　$(-1,\ 0)$ と点 $(4,\ -2)$ の距離で　$r=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$

　したがって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x+1)^2+y^2=29}$

(2)　$x^2+y^2+5x-3y+6=0$　より　$\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+6=0$

$\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

よって　**中心 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ の円**　を表す.

(3)　$x^2+2x+y^2+k=0$　より　$(x+1)^2+y^2=1-k$

よって，この方程式が円を表すのは　$1-k>0$　つまり　$\boldsymbol{k<1}$　のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 20 ー 2

(1)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ．

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の条件を満たすような k の値および値の範囲を求めよ．

(ア)　異なる 2 点で交わる　　(イ)　1 点で接する　　(ウ)　共有点をもたない

(1)　$x^2+y^2=5$　……①　　$y=-x+1$　……②

②を①に代入して　$x^2+(-x+1)^2=5$　　$x^2-x-2=0$　　$(x-2)(x+1)=0$

よって　$x=-1,\ 2$

したがって，共有点の座標は　**(−1，2)，(2，−1)**

(2)　$x^2+y^2=1$　……①　$y=x+k$　……②

②を①に代入して　$x^2+(x+k)^2=1$　　$2x^2+2kx+(k^2-1)=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$

(ア)　異なる 2 点で交わるのは　$D>0$ のとき

よって　$-k^2+2>0$　より　$k^2<2$　　したがって　$\boldsymbol{-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}}$

(イ)　1 点で接するのは　$D=0$ のとき

よって　$-k^2+2=0$　より　$k^2=2$　　したがって　$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{2}}$

(ウ)　共有点をもたないのは　$D<0$ のとき

よって　$-k^2+2<0$　より　$k^2>2$　　したがって　$\boldsymbol{k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k}$

(別解)　円 $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+k$　つまり　$x-y+k=0$ の距離 d は

$d=\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$　　また，円の半径は 1

(ア)　異なる 2 点で交わるのは　$d<1$ のとき

よって　$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<1$　より　$|k|<\sqrt{2}$　　したがって　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

(イ)　1 点で接するのは　$d=1$　のとき

よって　$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=1$　より　$|k|=\sqrt{2}$　　したがって　$k=\pm\sqrt{2}$

(ウ)　共有点をもたないのは　$d>1$ のとき

よって　$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}>1$　より　$|k|>\sqrt{2}$　　したがって　$k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 20 − 2

(1)　円 $x^2+y^2=2$ と直線 $2x-y+3=0$ の共有点の座標を求めよ.

(2)　円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ と直線 $y=x+m$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 m のとりうる値の範囲を求めよ.

(1)　$x^2+y^2=2$ ……①　　$2x-y+3=0$ ……②

②より　$y=2x+3$　これを①に代入して

$x^2+(2x+3)^2=2$　　$5x^2+12x+7=0$　　$(5x+7)(x+1)=0$

よって　$x=-1,\ -\dfrac{7}{5}$

したがって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(-1,\ 1),\ \left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)}$

(2)　$(x+2)^2+(y-1)^2=5$ ……①　　$y=x+m$ ……②

②を①に代入して　$(x+2)^2+(x+m-1)^2=5$　　$2x^2+2(m+1)x+m^2-2m=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(m+1)^2-2(m^2-2m)=-m^2+6m+1$

円と直線が異なる 2 点で交わるのは　$D>0$ のとき

よって　$-m^2+6m+1>0$　　$m^2-6m-1<0$　　したがって　$\boldsymbol{3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}}$

(別解)　円①の中心 $(-2,\ 1)$ と直線②　つまり　$x-y+m=0$ の距離を d とすると

$d=\dfrac{|-2-1+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}}$　　また円①の半径は　$\sqrt{5}$

円と直線が異なる 2 点で交わるのは　$d<\sqrt{5}$　のとき

つまり　$\dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}}<\sqrt{5}$　　$|m-3|<\sqrt{10}$　　$-\sqrt{10}<m-3<\sqrt{10}$

したがって　$3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 20 － 3

(1)　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　点 $(2,\ -1)$ から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(1)　公式より　$\boldsymbol{3x+4y=25}$

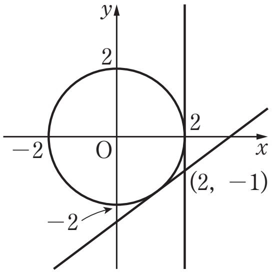
(2)　点 $(2,\ -1)$ を通り，x 軸に垂直な直線 $x=2$ は，

円 $x^2+y^2=4$ の接線である．

点 $(2,\ -1)$ を通るもう 1 本の接線は　$y=m(x-2)-1$　……①

つまり　$mx-y-2m-1=0$　とおける．

この直線と円の中心 $(0,\ 0)$ との距離が半径 2 と等しければよい．



よって　$\dfrac{|-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$　　$|2m+1|=2\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して　$(2m+1)^2=4(m^2+1)$　　$4m=3$　　よって　$m=\dfrac{3}{4}$

①より　$y=\dfrac{3}{4}(x-2)-1$　　つまり　$3x-4y-10=0$

以上より求める接線の方程式は　$\boldsymbol{x=2,\ 3x-4y-10=0}$

類題 20 － 3

(1)　円 $x^2+y^2=20$ 上の点 $(-2,\ -4)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　点 $(1,\ 5)$ から $x^2+y^2=13$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(1)　公式より　$-2x-4y=20$　　よって　$\boldsymbol{x+2y+10=0}$

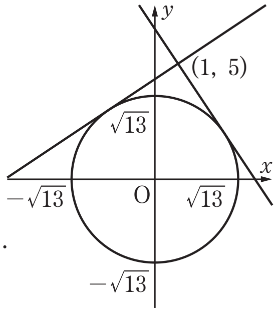
(2)　点 $(1,\ 5)$ を通り x 軸と垂直な直線 $x=1$ は

円 $x^2+y^2=13$ の接線ではない．

よって，求める接線を　$y=m(x-1)+5$　……①

つまり　$mx-y-m+5=0$　とおける．

この直線と円の中心 $(0,\ 0)$ との距離が半径 $\sqrt{13}$ と等しければよい．



よって　$\dfrac{|-m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{13}$　　$|m-5|=\sqrt{13}\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して　$(m-5)^2=13(m^2+1)$　　$6m^2+5m-6=0$　　$(3m-2)(2m+3)=0$

よって　$m=\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{2}$

$m=\dfrac{2}{3}$ のとき　①より　$y=\dfrac{2}{3}(x-1)+5$　つまり　$2x-3y+13=0$

$m=-\dfrac{3}{2}$ のとき　①より　$y=-\dfrac{3}{2}(x-1)+5$　つまり　$3x+2y-13=0$

したがって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{2x-3y+13=0,\ 3x+2y-13=0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 20 ー 4

2 円 $x^2+y^2=10$，$x^2+y^2-2x+6y+2=0$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2 円の共有点の座標を求めよ．

(2)　2 円の共有点を通る直線の式を求めよ．

(3)　2 円の共有点と原点を通る円の中心の座標と半径を求めよ．

(1)　$x^2+y^2=10$　……①　　$x^2+y^2-2x+6y+2=0$　……②

②－①より　$-2x+6y+2=-10$　つまり　$x=3y+6$　……③

これを①に代入して　$(3y+6)^2+y^2=10$　　$5y^2+18y+13=0$

よって　$y=-\dfrac{13}{5}$，-1

このとき③よりそれぞれ $x=-\dfrac{9}{5}$，3

したがって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{9}{5},\ -\dfrac{13}{5}\right),\ (3,\ -1)}$

(2)　(1)の 2 点を通る直線の傾きは　$\dfrac{-1-\left(-\dfrac{13}{5}\right)}{3-\left(-\dfrac{9}{5}\right)}=\dfrac{-5+13}{15+9}=\dfrac{1}{3}$

よって，求める直線の方程式は　$y=\dfrac{1}{3}(x-3)-1$　　つまり　$\boldsymbol{x-3y-6=0}$

(別解)　2 円の共有点を通る図形は

$x^2+y^2-2x+6y+2+k(x^2+y^2-10)=0$　……④　と表される．

これが直線を表すのは　$k=-1$ のとき

よって　$x^2+y^2-2x+6y+2-(x^2+y^2-10)=0$　より　$-2x+6y+12=0$

したがって，求める方程式は　$x-3y-6=0$

(3)　④が原点を通るとき，$x=0$，$y=0$ を代入して

$2-10k=0$　　$k=\dfrac{1}{5}$

このとき④より　$x^2+y^2-2x+6y+2+\dfrac{1}{5}(x^2+y^2-10)=0$

$6x^2+6y^2-10x+30y=0$　　$x^2+y^2-\dfrac{5}{3}x+5y=0$

$\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{125}{18}$　　　よって　**中心** $\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{6},\ -\dfrac{5}{2}\right)}$　**半径** $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{10}}{6}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 20 － 4

2 円 $x^2+y^2-6x+5=0$，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2 円の共有点を通る直線の式を求めよ．

(2)　2 円の共有点と点 (1，3) を通る円の中心の座標と半径を求めよ．

$x^2+y^2-6x+5=0$　……①，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$　……②　について

円①，②の共有点を通る図形の方程式は

$x^2+y^2-2x-2y+1+k(x^2+y^2-6x+5)=0$　……③　と表される．

(1)　③が直線を表すのは $k=-1$ のとき

このとき　$x^2+y^2-2x-2y+1-(x^2+y^2-6x+5)=0$　　よって　$\mathbf{2x-y-2=0}$

(2)　③に $x=1$，$y=3$ を代入して　$3+9k=0$　　よって　$k=-\dfrac{1}{3}$

このとき③より　$x^2+y^2-2x-2y+1-\dfrac{1}{3}(x^2+y^2-6x+5)=0$

$x^2+y^2-3y-1=0$　　$x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}$　　よって　**中心** $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$　**半径** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　図形と方程式(2)

(1)　円 $x^2+y^2+4x-6y=0$ と中心が同じで，点 (2，1) を通る円の方程式は

$(x+\boxed{ア})^2+(y-\boxed{イ})^2=\boxed{ウエ}$　である．

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=mx+2$ が共有点をもつときの定数 m の値の範囲は

$m \leqq -\sqrt{\boxed{オ}}$，$\sqrt{\boxed{オ}} \leqq m$　である．

(3)　点 (4，2) を通り，円 $x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式は

$y=\boxed{カ}$，$\boxed{キ}x-\boxed{ク}y-\boxed{ケコ}=0$　である．

解答例

(1)　$x^2+y^2+4x-6y=0$　より　$(x+2)^2+(y-3)^2=13$

よって求める円の中心は　$(-2, 3)$

半径 r はこの中心と (2，1) の距離で　$r=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

したがって，求める円の方程式は　$(x+\mathbf{2})^2+(y-\mathbf{3})^2=\mathbf{20}$

(2)　円 $x^2+y^2=1$ の中心 (0，0) と直線 $y=mx+2$　つまり　$mx-y+2=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

円と直線が共有点をもつためには　$d \leqq$(円の半径)　より

$$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} \leqq 1 \qquad \sqrt{m^2+1} \geqq 2$$

両辺を2乗して　$m^2+1 \geqq 4$　　$m^2 \geqq 3$　　　よって　$m \leqq -\sqrt{\mathbf{3}}$，$\sqrt{3} \leqq m$

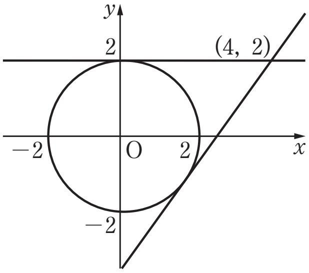
(3)　点 (4，2) を通り x 軸と垂直な直線 $x=4$ は

円 $x^2+y^2=4$ の接線ではない．

よって求める接線を　$y=m(x-4)+2$　……①

つまり　$mx-y-4m+2=0$　とおける．

この直線と円の中心 (0，0) との距離が半径2と等しければよい．



よって　$\dfrac{|-4m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$　　$|4m-2|=2\sqrt{m^2+1}$

両辺を2乗して　$(4m-2)^2=4(m^2+1)$　　$3m^2-4m=0$　　よって　$m=0, \dfrac{4}{3}$

$m=0$ のとき　①より　$y=2$　　　$m=\dfrac{4}{3}$ のとき　①より　$y=\dfrac{4}{3}(x-4)+2$

したがって，求める接線の方程式は　$y=\mathbf{2}$，$\mathbf{4}x-\mathbf{3}y-\mathbf{10}=0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。